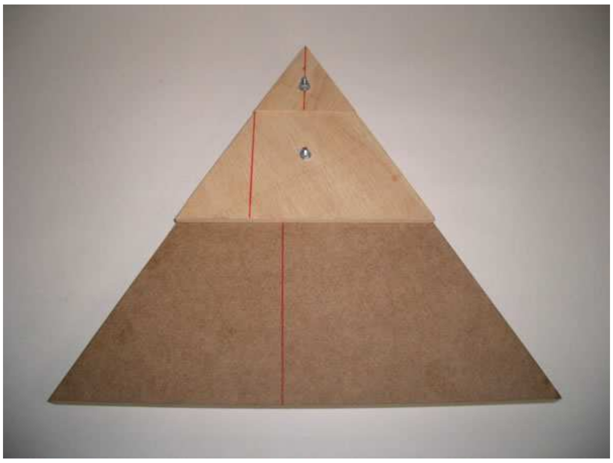
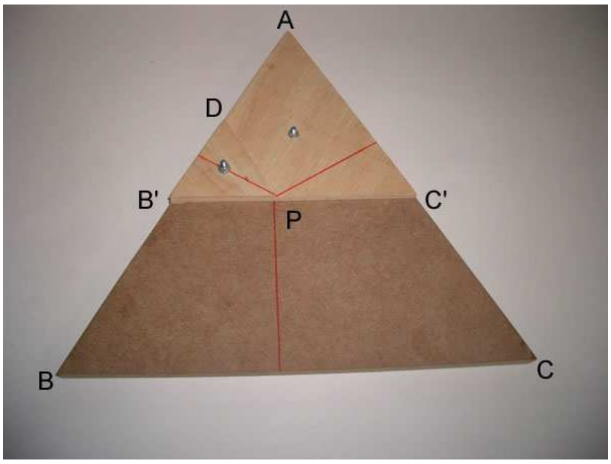
TEOREMA DE VIVIANI

DESCRIPCIÓ DEL MATERIAL: Model de fusta format per tres triangles equilàters:

- Un triangle equilàter ABC gran on assenyalem en vermell un punt P i el segment que uneix perpendicularment aquest punt amb el costat BC.
- Un triangle equilàter més petit AB’C’ tal que el costat B’C’ contingui el punt P i sigui paral·lel a BC, que el costat AB’ estigui sobre AB, que el costat AC’ estigui sobre AC tal com mostra la imatge i que pugui girar entorn al seu baricentre que està fixat sobre el triangle ABC amb un cargol. En aquest triangle tracem en vermell el segment que uneix perpendicularment el punt P amb el costat AC’.
- Un triangle equilàter encara més petit DB’P tal que tingui un vèrtex en el punt P, que el costat DP sigui paral·lel a AC’, que el costat B’P estigui sobre B’C’, que el costat DB’ estigui sobre AB’ tal com mostra la imatge i que pugui girar entorn al seu baricentre que està fixat sobre el triangle AB’C’ amb un cargol. En aquest triangle tracem en vermell l’altura que uneix el vèrtex P amb el costat DB’.

IMATGE:





CONTINGUTS: Conceptes diversos de geometria plana, demostracions visuals, raonament geomètric.

PROPOSTA D’APLICACIÓ DIDÀCTICA: El teorema de Viviani afirma: Donat un triangle equilàter ABC i un punt P qualsevol en el seu interior o sobre un dels seus costats, la suma de distàncies des d’aquest punt als tres costats és igual a l’altura del triangle.

Entorn a aquest teorema podem plantejar les següents activitats:

1. Enunciar el teorema i proposar que cada alumne/a dibuixi un triangle equilàter i que el comprovi per a diversos punts, traçant i mesurant els segments perpendiculars corresponents.

2. Fer la demostració visual del que acabem de comprovar: observem que es tracta tan sols de demostrar que la suma dels tres segments assenyalats en vermell és l'altura del triangle. N'hi haurà prou en girar el triangle AB'C' fins a col·locar el costat AC' paral·lel al costat BC de manera que el segment vermell quedi vertical. A continuació girarem el triangle petit B'DP fins a situar el costat B'D també paral·lel al costat BC de manera que el segment vermell també quedi vertical. En aquest moment els tres triangles queden tal com es mostra a la segona fotografia. És immediat observar que la suma dels tres segments vermells és l'altura del triangle ABC.

3. Podem acabar el bloc d'activitats fent la demostració formal d'aquest teorema. N'hi ha prou amb traçar tres segments que uneixin el punt P amb cadascun dels vèrtexs A, B i C i escriure, en termes algebraics, que l'àrea del triangle gran és igual a la suma de les àrees dels tres triangles petits. Donat que tots els triangles tenen la mateixa base ja que els tres costats són iguals (c) i que les altures dels tres triangles petits són els tres segments vermells (v_1, v_2 i v_3), si anomenem a a l'altura del triangle gran, tindrem:

$$\frac{1}{2}c\cdot a = \frac{1}{2}c\cdot v_1 + \frac{1}{2}c\cdot v_2 + \frac{1}{2}c\cdot v_3 .$$

Simplificant haurem demostrat formalment el teorema:

$$a = v_1 + v_2 + v_3 .$$

CONNEXIONS: La construcció pot fer-se amb col·laboració amb l'àrea de tecnologia. És una pràctica molt interessant.

ALTRES COMENTARIS: Observem que es tracta d'un teorema sorprenent, fàcil de comprendre per què maneja idees molt senzilles, fàcil de comprovar prenent mesures concretes per a diversos punts i fàcil de demostrar com hem vist. Permet diverses generalitzacions però que ja no poden ser demostrades visualment amb tanta facilitat. Aquest resultat es deu a Vincenzo Viviani que fou un deixeble de Galileu i de Torricelli, que va néixer a Florència a l'any 1622 i va morir també a Florència a l'any 1703. Agraeixo al professor Quim Tarradas la construcció del magnífic model que apareix a les imatges. En aquest recurs no s'observa cap risc.

Aquest element pertany a una Llicència d'Estudis realitzada pel Departament d'Ensenyament durant el curs 2005-2006, titulada *Recursos materials i activitats experimentals en l'educació matemàtica a secundària.*