A

C

B

Resolució d'equacions completant quadrats a l'estil d'Al-Khwârizmî

Iolanda Guevara Casanova
IES Badalona VII

Una situació problemàtica

La resolució d'equacions de 2n grau és un dels continguts del currículum de 3r d'ESO que presenten més dificultats als alumnes d'aquest nivell perquè el grau d'abstracció que comporta fa que memoritzin l'algorisme de resolució, amb més o menys fortuna, però sense cap mena de significativitat i sentit; especialment si es considera que al s. XXI la calculadora i l'ordinador desplacen a un segon lloc els càlculs manuals.

Sorgeix de l'aula i es resoldrà per a l'aula

Unes quantes preguntes

- Per a què serveixen les equacions de 2n grau?
- Quines situacions de la vida quotidiana plantegen problemes que s’han de resoldre amb equacions de 2n grau?
- Com es resolen les equacions de 2n grau?
- Hi ha alguna relació entre el mètode per a resoldre equacions de 1r grau i el de 2n grau?
- Té sentit ensenyar/aprendre a resoldre equacions de 2n grau amb mètodes manuals, amb llapis i paper, al s. XXI quan les calculadores i els ordinadors ho resolen?

Més enllà del que diuen el currículum i els llibres de text

Unes quantes preguntes

- Com s'han resolt al llarg de la història aquestes equacions?
- Què es podria utilitzar del desenvolupament històric de la resolució de l'equació de 2n grau per a construir un mètode de resolució a l'abast de l'alumnat? La història implícita en les lliçons de l'aula
- Què cal explicar d'història de la matemàtica per a fer viure a l'alumnat la necessitat de resoldre equacions de 2n grau?

Més enllà del que diuen el currículum i els llibres de text.

Propòsit de l’experiència

- Plantejar un mètode de resolució que aprofiti l’experiència de la història de les matemàtiques.

- Dotar als alumnes d’un recurs, els auxiliars visuals, que els doni més confiança en la seva capacitat de resoldre equacions i els familiaritzi millor amb el llenguatge algebraic.

- Provocar que els alumnes connectin diferents continguts per fer-los veure que les matemàtiques són un tot en xarxa que s’ha d’activar alhora per a resoldre millor els problemes.

Dins del marc de la programació prevista de 3r.
Història + Connexions i coneixements previs.

Tres preguntes

- Què puc utilitzar del desenvolupament històric de l’equació de 2n grau per a construir un mètode de resolució per als meus alumnes?
- Combinar àlgebra i geometria, a través dels auxiliars visuals, a l’inici de l’àlgebra és un recurs o una dificultat pels alumnes?
- Del que jo crec que saben els meus alumnes sobre la resolució algebraica d’equacions de 1r grau, que seran capaços de transferir a l’equació de 2n grau?

El fil conductor de l’experiència.

Per què un context històric?

En el currículum oficial, a 3r d'ESO, un dels exemples de contextos històrics proposats és *La resolució geomètrica d'equacions (Grècia, Índia, Món Àrab).*

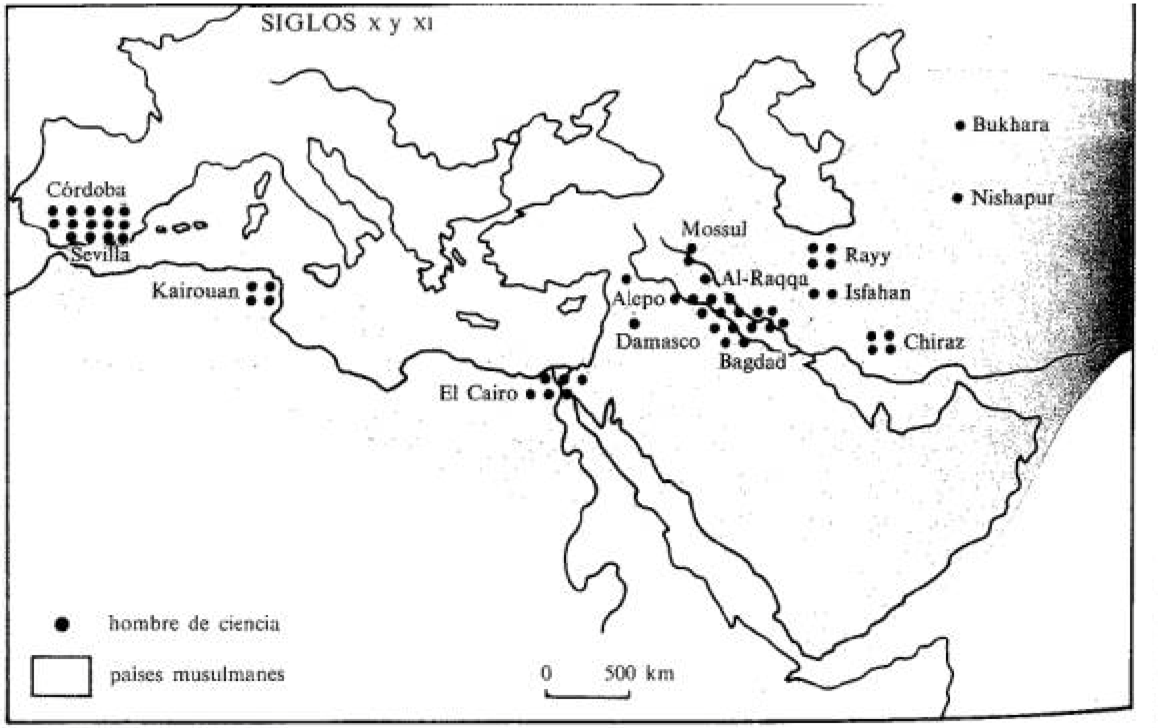
En aquesta experiència ens cenyim a un dels dos tipus d'equacions, les de 2n grau, tot i que veurem la relació amb les de 1r grau.

En quant a l'època, tot i donar referències de diferents períodes ens centrem en el Món Àrab, perquè és la baula final que durà a la resolució de l'equació de 2n grau amb la fórmula actual.

Partir de les recomanacions del currículum i adaptar-les

El context històric Àrab

Mentre l'imperi romà va desaparèixer a Occident i amb ell es va produir la decadència de la ciència grega, l'imperi a Orient es va mantenir.



El profeta Mahoma nascut l'any 580, va formar un estat mahometà a la Meca l'any 622, que es va anar expandint fins al segle XII.

El context històric Àrab

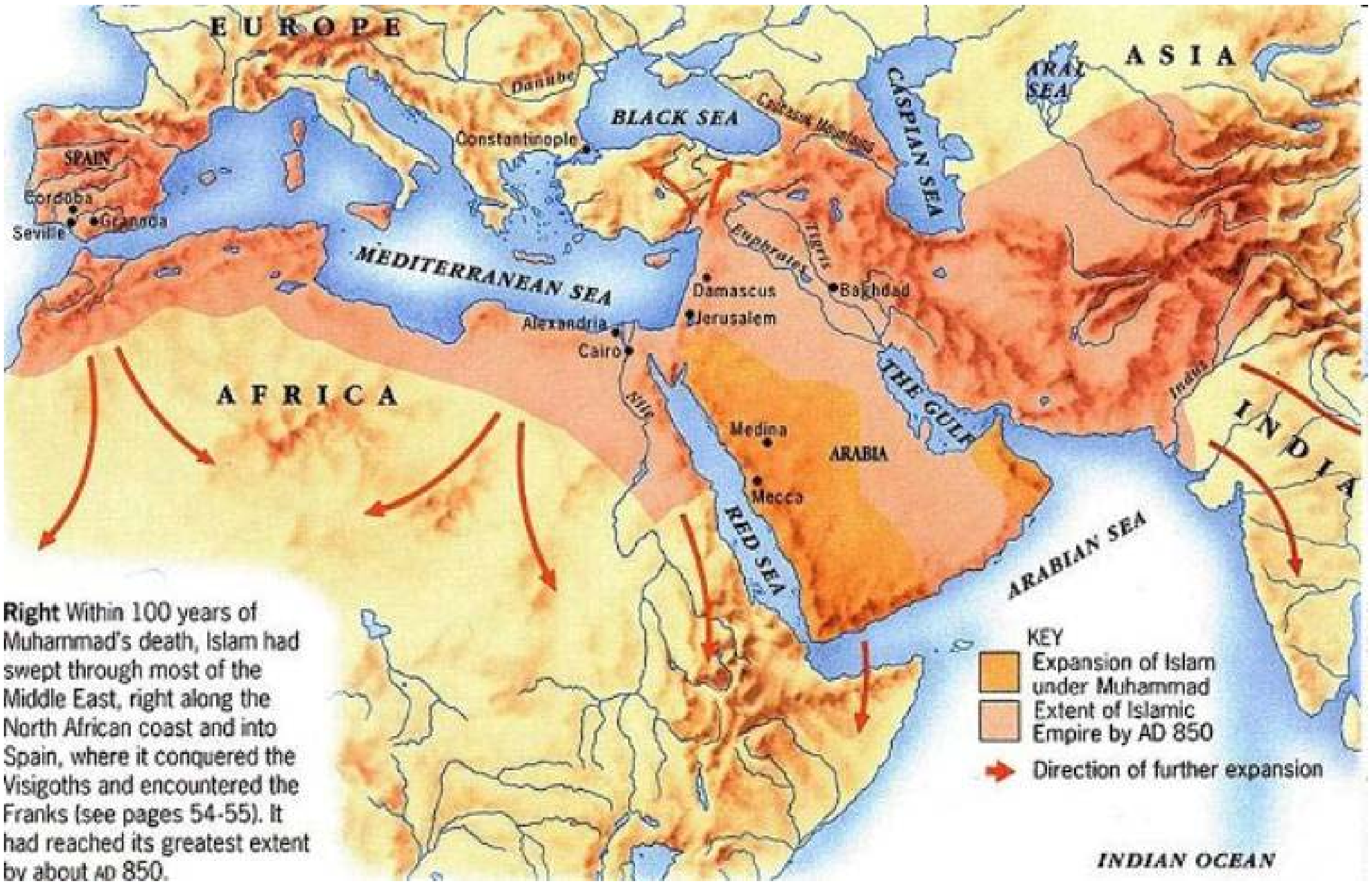
- Recull l'abstracció del saber grec i el pragmatisme i càlcul del saber hindú
- Bagdad va ser el gran centre científic on van arribar i es van traduir les grans obres gregues com ara els *Elements* d'Euclides, l'*Almagest* de Ptolemeu.
- Altres focus de cultura: El Caire, Còrdova, Samarcanda, Isfahan,...
- Van fer importants contribucions en física, astronomia d'observació, alquímia, medicina, geometria i àlgebra.

Abu Ja’far Mohamed Ben-Musa al-Khwârizmî (780- 850)

Matemàtic, astrònom i membre de la Casa de la Saviesa de Bagdad, és considerat com el creador de les regles de l’àlgebra: *Hisâb al-jabr wal-muqqabala* (813)

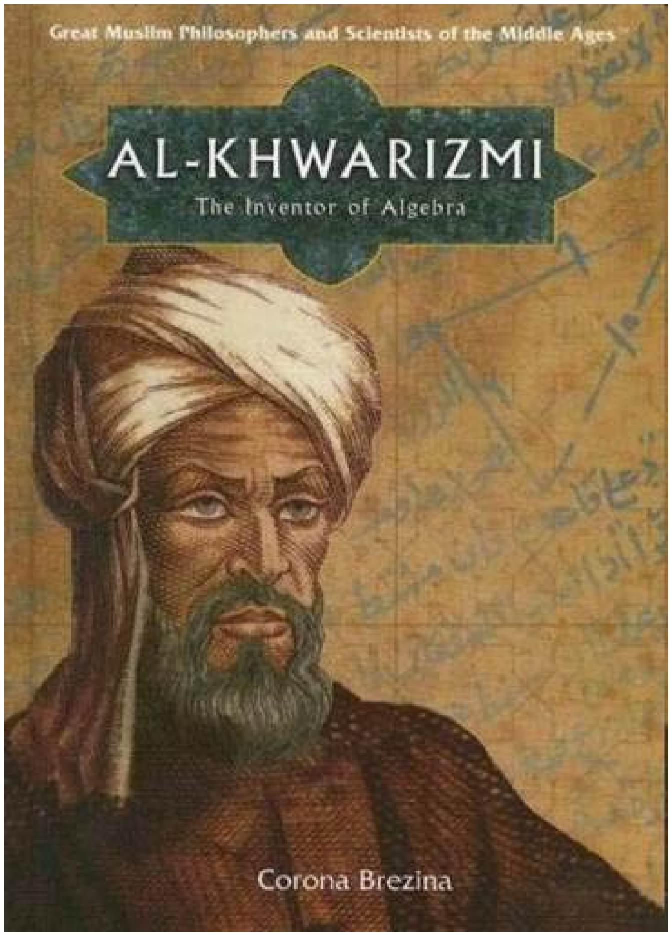
Traduïda al llatí per Roberto de Chester: *Liber algebrae et almucabala (Segovia, 1145)*

Abu Ja’far Mohamed Ben-Musa al-Khwârizmî (780- 850)



Right Within 100 years of Muhammad's death, Islam had swept through most of the Middle East, right along the North African coast and into Spain, where it conquered the Visigoths and encountered the Franks (see pages 54-55). It had reached its greatest extent by about AD 850.

Abu Ja'far Mohamed Ben-Musa al-Khwârizmî (780- 850)



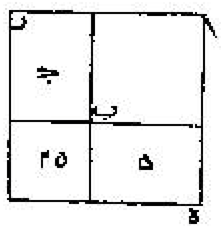
Llenguatge retòric, us conjunt de raonament geomètric i algebraic.

Sis tipus d'equacions, en el llenguatge actual:

$ax^2 = bx$	$ax^2 = c$
$bx = c$	$ax^2 + bx = c$
$ax^2 + c = bx$	$bx + c = ax^2$

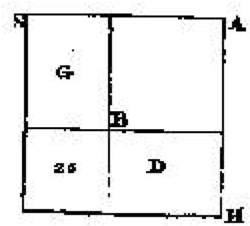
La justificació geomètrica d'al-Khwârizmî

علي تسعة وثلثين ليتم السطح الاعظم الذي هو سطح ره فبلغ
ذلك كله اربعة وستين فاخذنا جذرها وهو ثمانية وهو احد
اضلاع السطح الاعظم فاذا نقصنا منه مثل ما زدنا عليه وهو
خمسة بقي ثلثة وهو ضلع سطح اب الذي هو المال وهو جذره
والمال تسعة وهذه صورته



واما مال واحد وعشرون درهما يعدل عشرة اجذاره فانا
نجعل المال سطحا مربعا مجهول الاضلاع وهو سطح اد ثم نضم
اليه سطحا متوازي الاضلاع عرضه مثل احد اضلاع سطح اد وهو
ضلع هن والسطح هب فصار طول السطحين جميعا ضلع جه
وقد علمنا ان طوله عشرة من العدد لان كل سطح مربع
متساوي الاضلاع والزوايا فان احد اضلاعه مضروبا في واحد جذر
ذلك السطح وفي اثنين جذراه فلما قال مال واحد وعشرون
يعدل عشرة اجذاره علمنا ان طول ضلع هج عشرة اعداد لان
ضلع جد جذر المال فقسمنا ضلع جه بنصفين على نقطة

the first quadrate, which is the square, and the two quadrangles on its sides, which are the ten roots, make together thirty-nine. In order to complete the great quadrate, there wants only a square of five multiplied by five, or twenty-five. This we add to thirty-nine, in order to complete the great square S H. The sum is sixty-four. We extract its root, eight, which is one of the sides of the great quadrangle. By subtracting from this the same quantity which we have before added, namely five, we obtain three as the remainder. This is the side of the quadrangle A B, which represents the square; it is the root of this square, and the square itself is nine. This is the figure:—

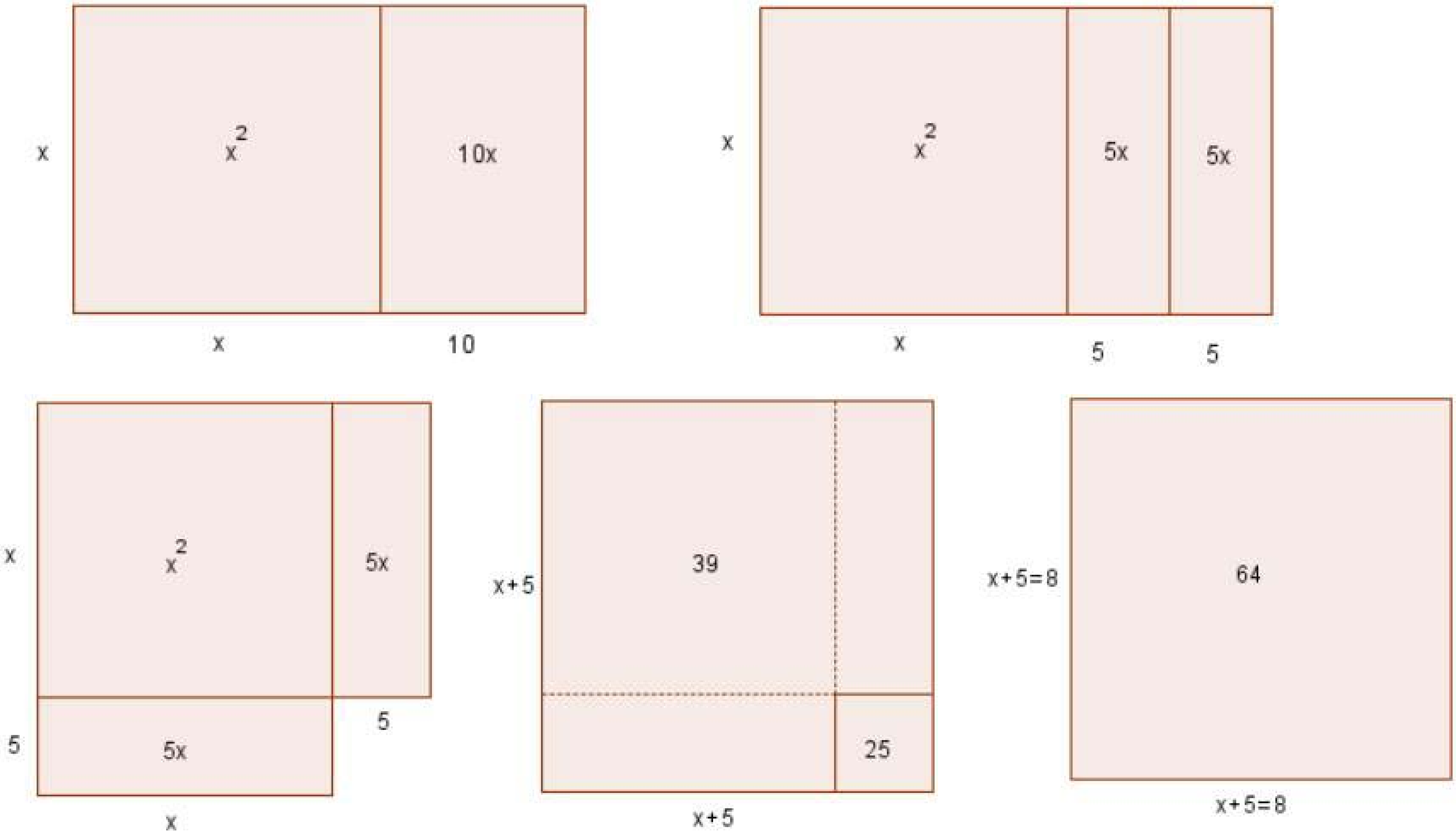


*Demonstration of the Case: "a Square and twenty-one Dirhems are equal to ten Roots."**

We represent the square by a quadrate A D, the length of whose side we do not know. To this we join a parallelogram, the breadth of which is equal to one of the sides of the quadrate A D, such as the side H N. This parallelogram is H B. The length of the two

D’al-Khwârizmî a l’aula

$$x^2 + 10x = 39$$



Raonament visual que combina àlgebra i geometria.

El context històric

Abans d’entrar en la matèria pròpiament matemàtica caldrà situar l’alumnat en el Món Àrab de l’època. Aquesta primera introducció es planteja com a tasca de recerca de l’alumnat entorn al-Khwârizmî:

- Quan i on va viure?
- A què es dedicava?
- Quines obres va escriure que van transcendir i van marcar camí en la història de les matemàtiques?
- A quines preguntes volia respondre amb la seva obra?

Les primeres equacions de 2n grau

La resolució algebraica:

Es dediquen unes primeres sessions a la resolució algebraica d’equacions incompletes, utilitzant els procediments propis de les equacions de 1r grau combinats amb l’extracció de l’arrel quadrada.

Es tracta d’aprofitar les habilitats adquirides per a l’alumnat en plantejar, interpretar i resoldre equacions de 1r grau, per a resoldre les equacions de 2n grau incompletes.

Les primeres equacions de 2n grau

La resolució geomètrica:

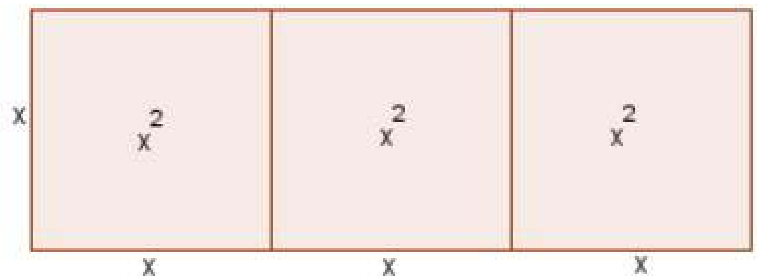
Es dediquen unes sessions a la interpretació geomètrica de x^2 i poc a poc s'introdueix a l'alumnat en la resolució d'equacions de 2n grau incompletes, però ara des del punt de vista geomètric, a través de la interpretació de x i x^2 com a mesures de costats de quadrats i de les seves àrees respectives.

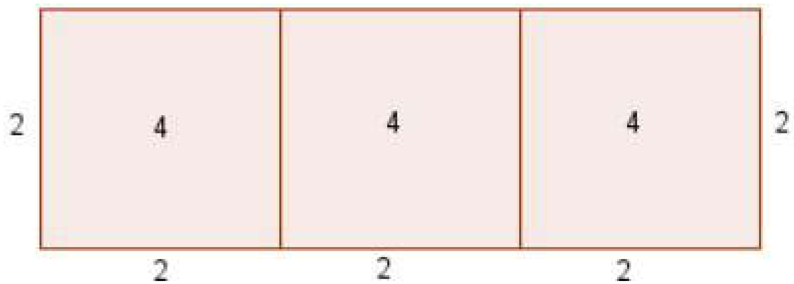
De l'equació de 1r grau a la de 2n grau

- Les equacions de 2n grau incompletes

$$3x^2 = 12 \qquad\qquad 2x^2 - 8x = 0$$

- La interpretació geomètrica de $3x^2 = 12$

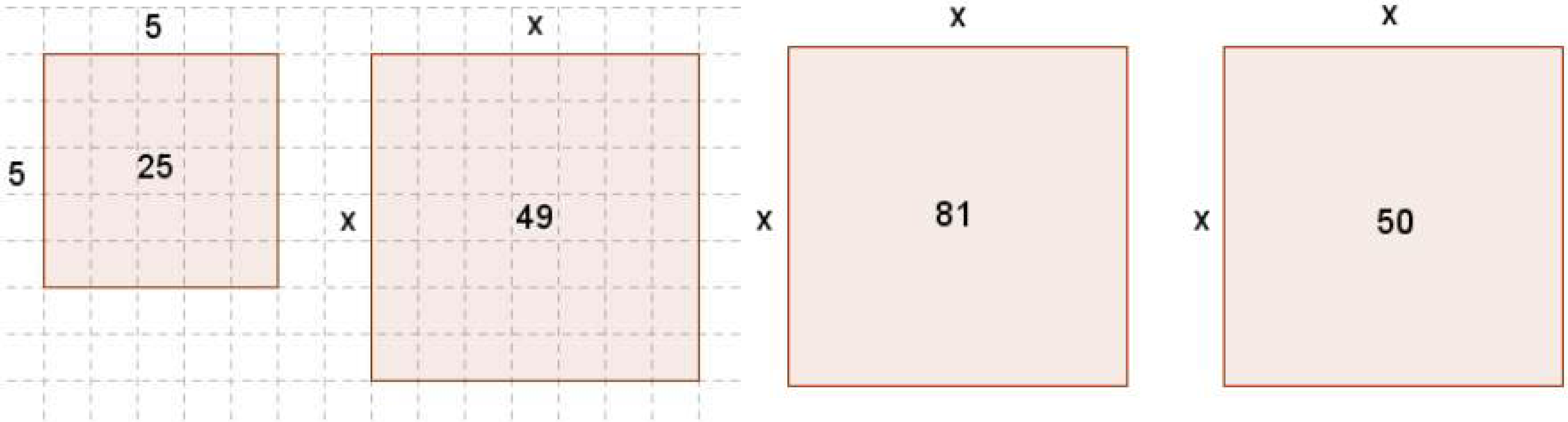




Arribar al quadrat i fer l'arrel quadrada per a trobar les solucions.
Combinar àlgebra i geometria. Transferir i connectar.

Equacions de 2n grau incompletes

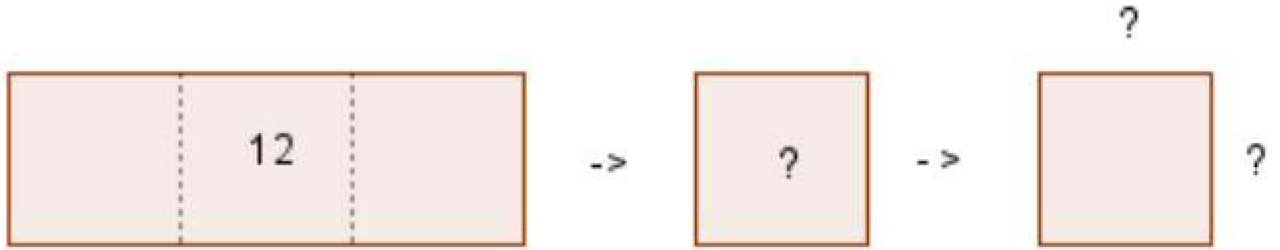
a) Treballant amb un quadrat i la seva àrea

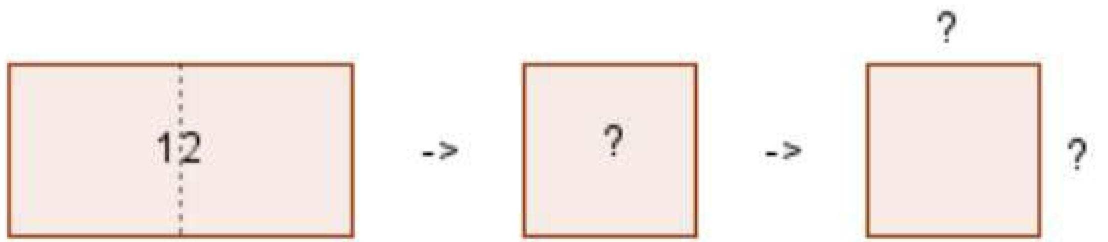


Es resolen equacions del tipus:

$x^2 = a$ o bé $x^2 - a = 0$ amb $a > 0$

b) Quan es treballa amb més d'un quadrat

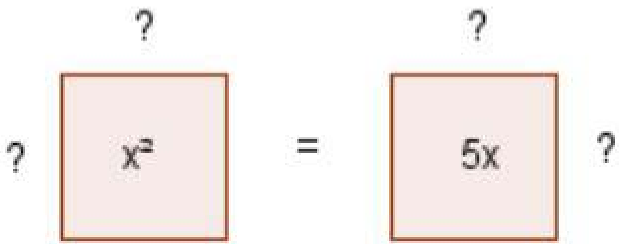




Es resolen equacions del tipus:

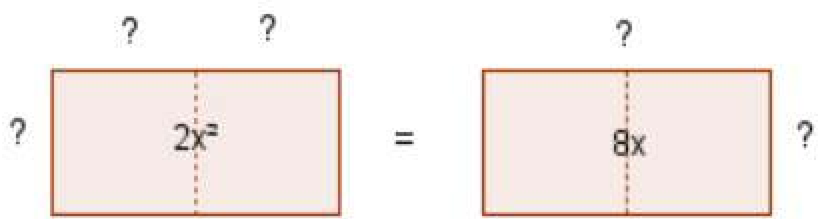
$$ax^2 = c$$

c) Per introduir les equacions on x és factor comú cal treballar amb:



$\Rightarrow \quad x = \ldots$

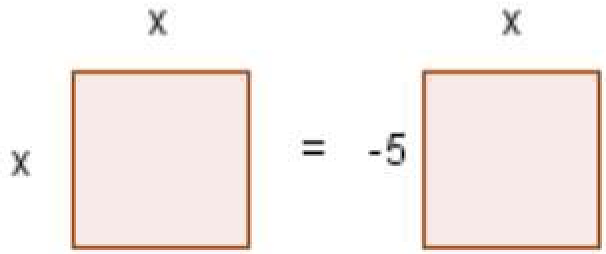
Com seria l'expressió algebraica de l'equació resolta? . . . .
I també:



$\Rightarrow \quad x = \ldots$

Resolució de l'equació: . . . .

Es resol pel mateix procediment: $x^2 + 5x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = -5x$



segons la figura, quin valor ha de tenir x perquè tot funcioni?

En definitiva es resolen les equacions dels tipus:

$$ax^2 = bx$$

on *a* i *b* poden ser indistintament coeficients positius o negatius.

És el moment de fer recapitulació i parlar de les solucions obtingudes fins ara i d'introduir les solucions negatives o nul·les.

Primeres conclusions en el procés

Un cop l’alumnat ha descobert com són les solucions de les equacions que s’han anat resolent fins ara (nombres oposats o bé un nombre qualsevol i el zero) se’ls convida a que escriguin equacions a partir de les seves solucions, en els casos equivalents als analitzats fins ara, és a dir:

$$\left.\begin{array}{lll} x = 3, -3 & \Rightarrow & x^2 = 9 \text{ o bé } x^2 - 9 = 0 \\ x = 3, 0 & \Rightarrow & x^2 = 3x \text{ o bé } x^2 - 3x = 0 \\ x = -3, 0 & \Rightarrow & x^2 - 3x \text{ o bé } x^2 + 3x = 0 \end{array}\right\}$$

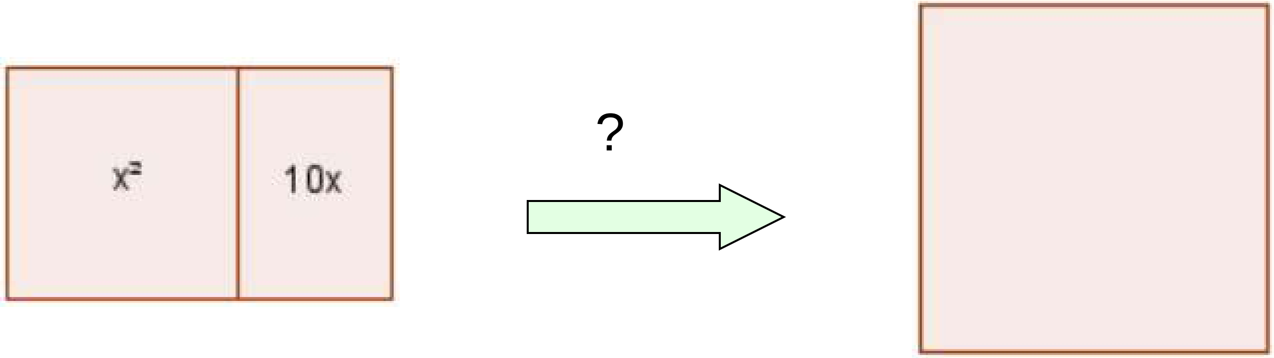
i totes les seves múltiples fins arribar a:

$ax^2 = c$ i $ax^2 = bx$

Les equacions de 2n grau completes

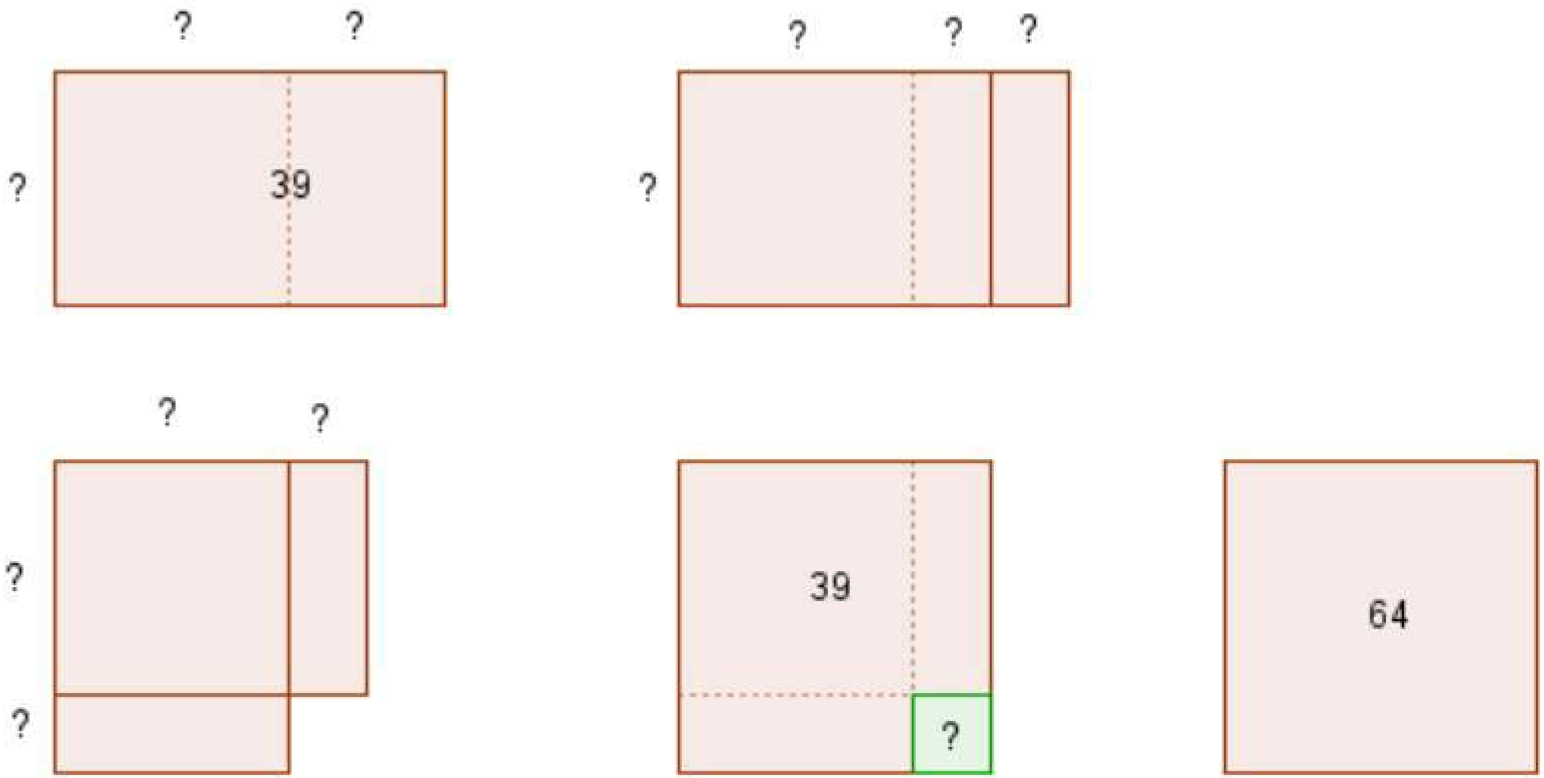
$$x^2 + 10x = 39$$

Què es pot inferir del procés anterior que acabava amb l'extracció d'una arrel quadrada?

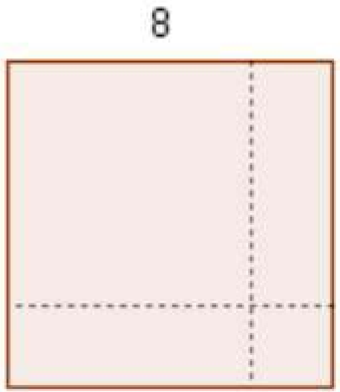


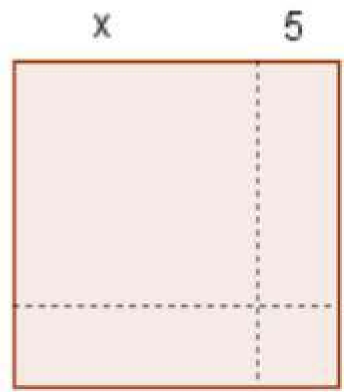
És possible transformar aquesta figura, d'àrea coneguda: 39 en un quadrat o gairebé?

El procediment usat per al-Khwârizmî

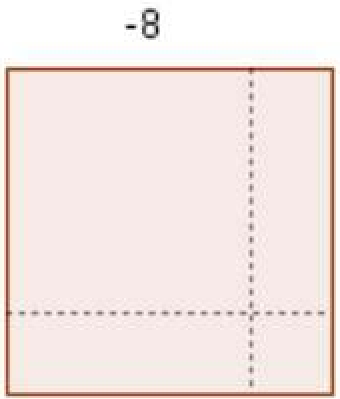


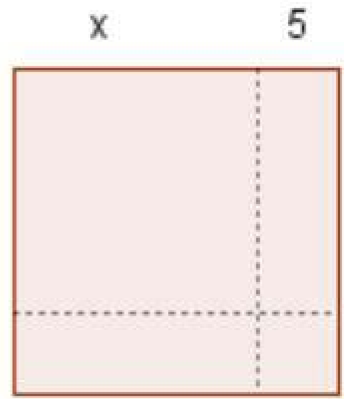
A partir del 64 i de les seves arrels quadrades, 8 i –8 cal reconstruir el procés i arribar a les solucions:





$\Rightarrow \quad x = \ldots$

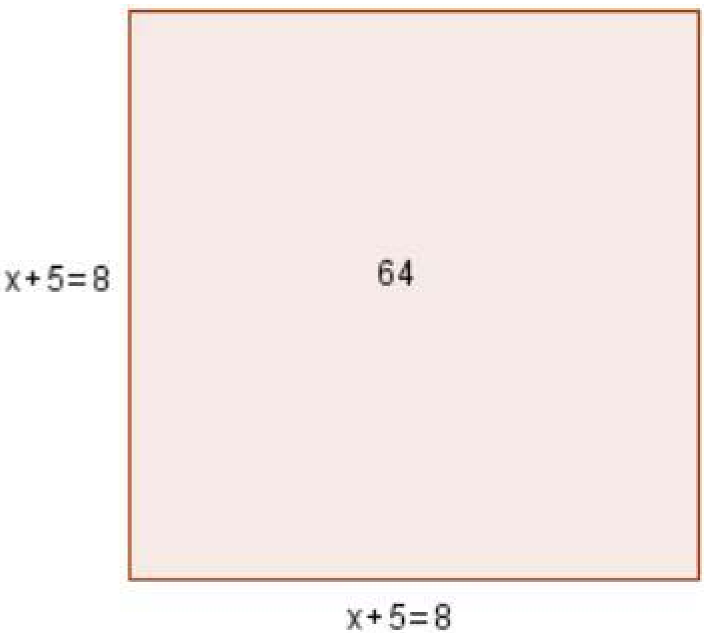




$\Rightarrow \quad x = \ldots$

S'arriba a les dues solucions?

$$x^2 + 10x = 39$$



l'arrel quadrada de 64 també és –8!

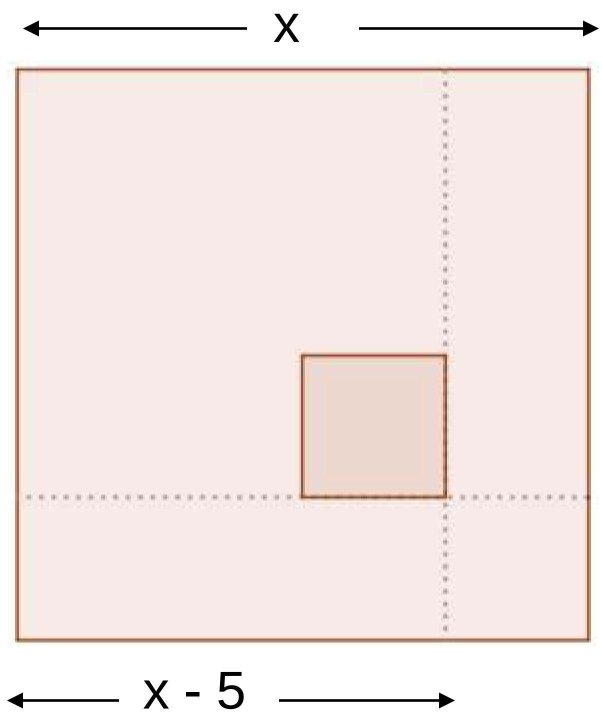
$x + 5 = -8$

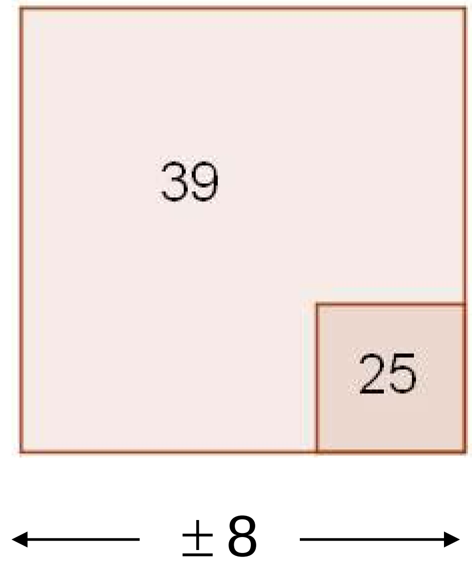
$x = - 8 – 5 = -13$ segona solució

Caldrà veure com s'accepten les longituds i les àrees negatives.

Com es resol l'equació quan el coeficient de la x és negatiu?

$$x^2 - 10x = 39$$



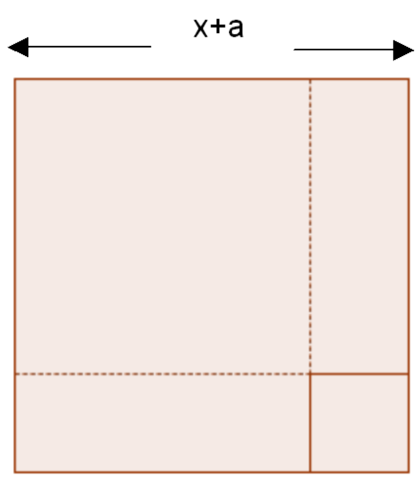


Cal manipular amb paper per adonar-se que el petit quadrat es resta dues vegades.

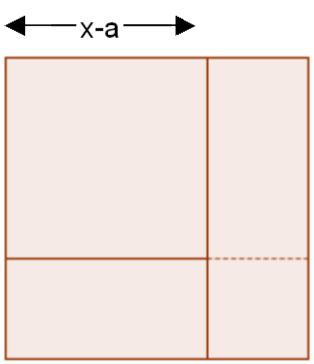
Un recurs visual: un quadrat de paper retallable

Per distingir el cas en què el coeficient de la x de 1r grau és positiu del cas en què el coeficient de la x de 1r grau és negatiu.

$$x^2 + ax = b$$



$$x^2 - ax = b$$

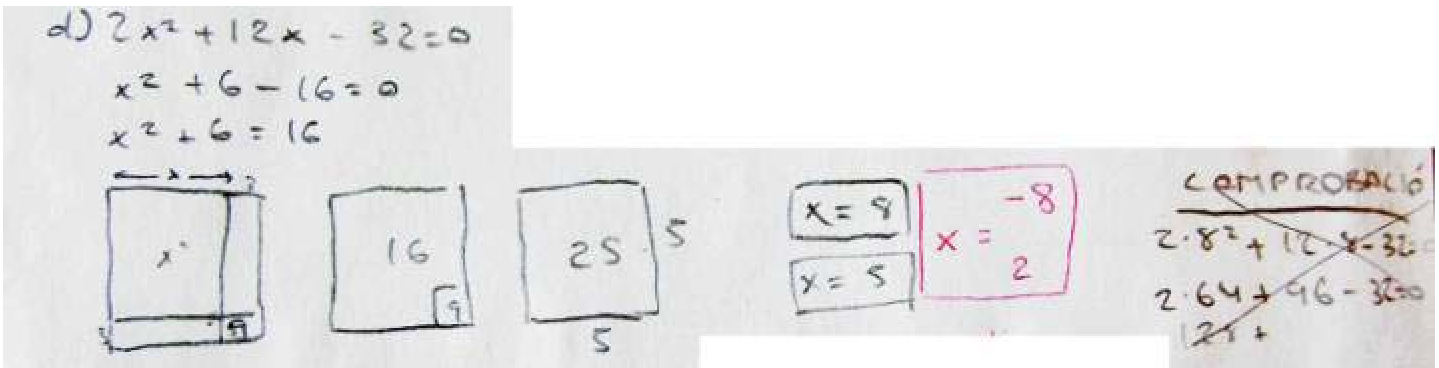


El "retallable" obert

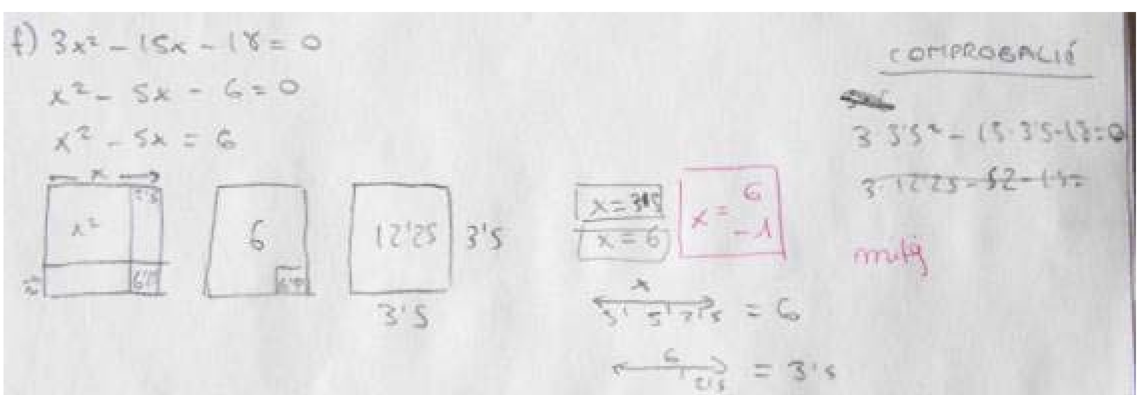
El "retallable" plegat endins

Les tasques de quatre alumnes

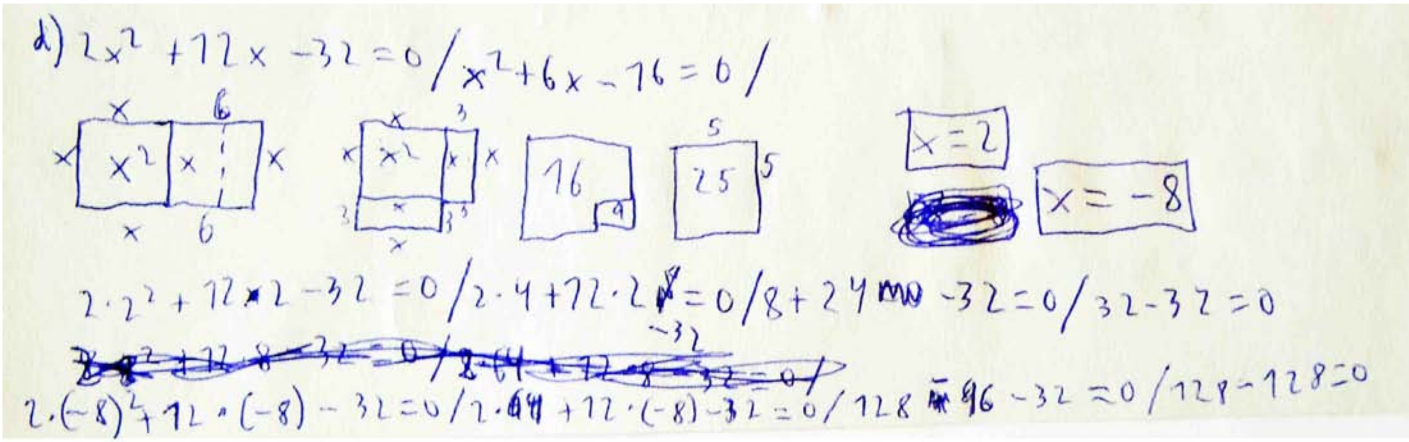
a) L’alumna 1



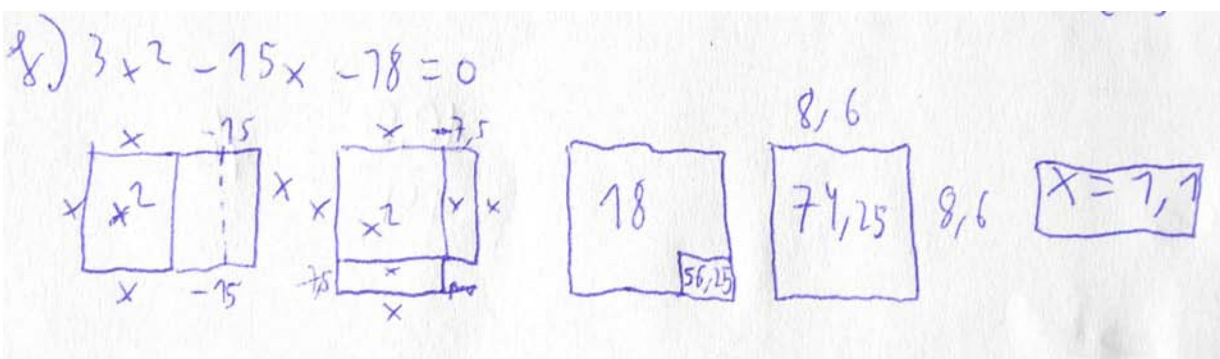
Del rectangle a completar el quadrat però al final, què està buscant?



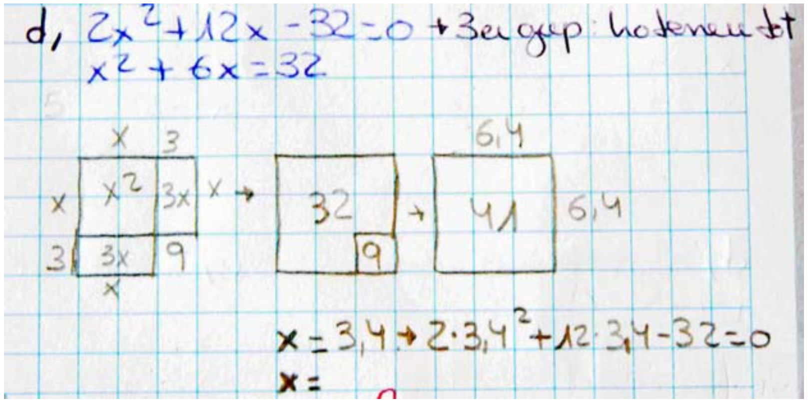
b) L’alumne 2



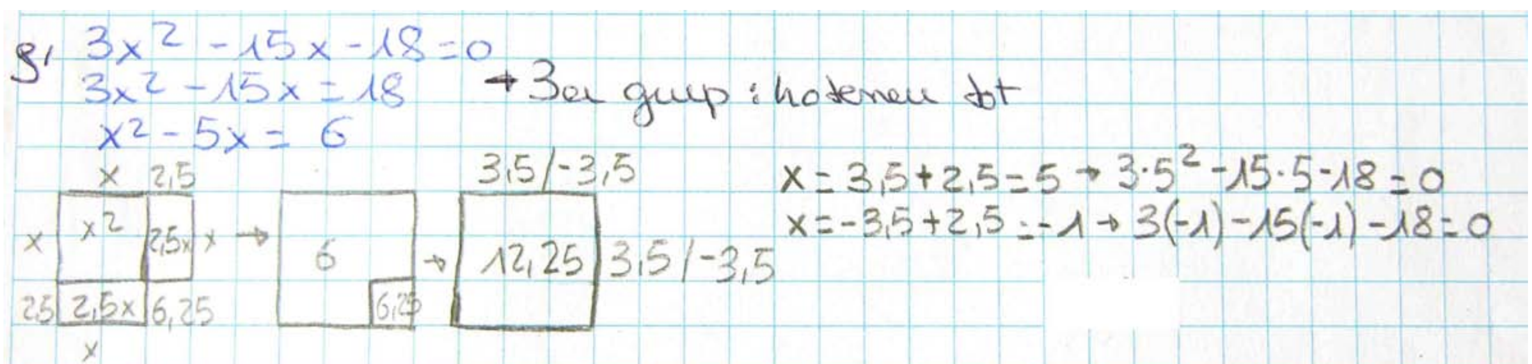
En el primer se’n surt però en el segon exemple no simplifica l’equació inicial i acaba resolent una altra equació.



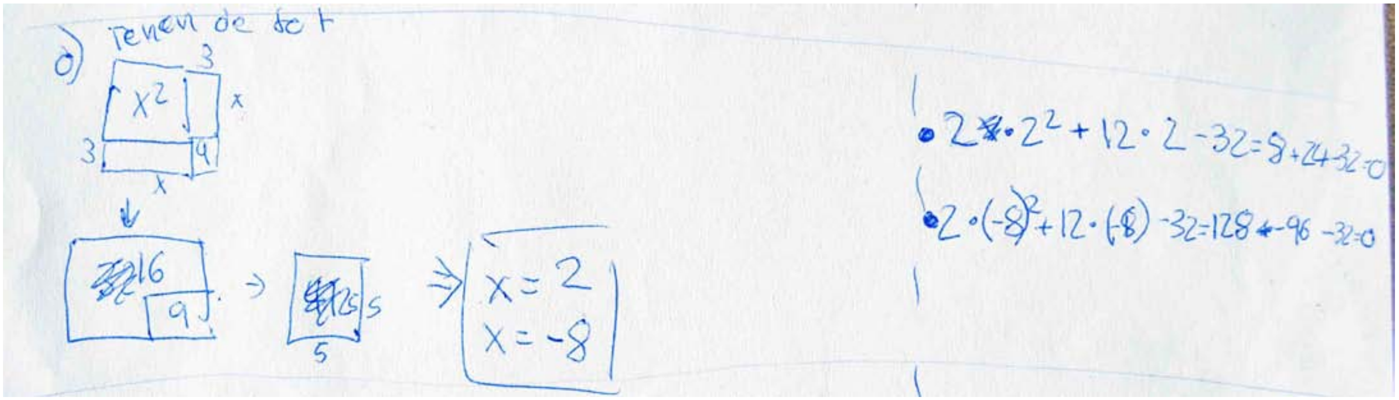
c) L’alumna 3



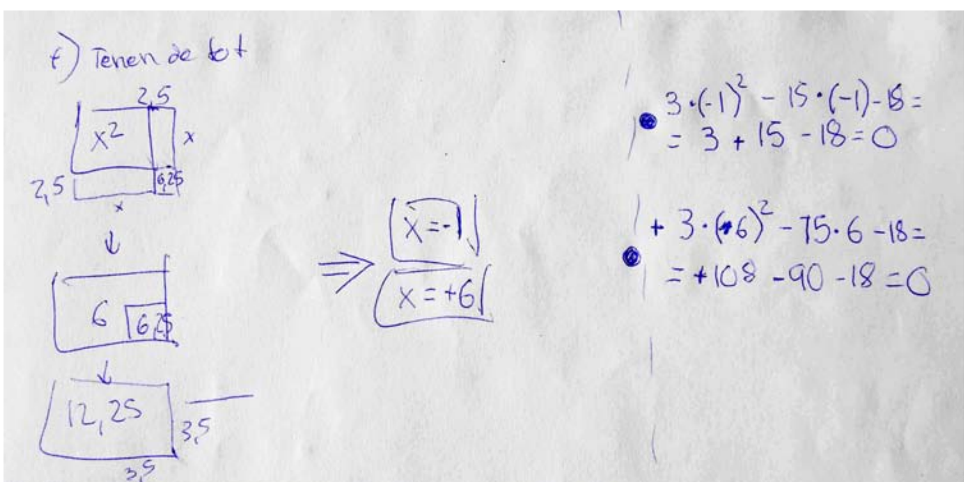
En el primer un problema simplificant, en el segon a la suma al final



d) L’alumne 4



No explica com ho fa però segurament a partir de les figures fa els càlculs mentalment.



L'activitat

- Integrada en la programació del curs.
- Utilitza l'àlgebra d'al-Khwârizmî com a fil conductor.
- Parteix de l'equacions de 1r grau per arribar a les de 2n grau.
- Connecta l'àlgebra i la geometria.
- Utilitza auxiliars visuals per a recolzar el raonament geomètric.
- Queda pendent el trànsit cap a l'àlgebra sense el recolzament en la geometria.

L'alumnat

- Els coneixements adquirits actuen com a previs per investigar noves situacions. Aquí la resolució de l'equació de 1r grau.
- La resolució de situacions no és única, de vegades hi ha mètodes que són més intuïtius. Aquí els auxiliars visuals.
- El procés de combinar geometria i àlgebra els fa veure les matemàtiques com un tot i la necessitat de connectar diferents continguts per a resoldre problemes.
- La història de les matemàtiques aporta a aquesta ciència la dimensió humana, social i cultural.
- Treballar en equip i amb responsabilitat ajuda a construir millor el coneixement propi i el dels altres.

La professora

- La història de les matemàtiques és una font de recursos interminable per dissenyar activitats d'aprenentatge.
- Els coneixements previs en el disseny d'activitats potencien les connexions i posa de manifest què havien après realment.
- Propòsits de l'experiència (auxiliars visuals) + atenció a les dificultats de l'alumnat = auxiliars visuals "manipulables".
- Cal respectar el ritme de l'alumnat, buscar l'equilibri entre deixar pensar i respondre preguntes.
- El treball en grup modula els diferents ritmes dels alumnes.